Ф9.1 Даны две окружности радиусами R_1 и R_2 и два наблюдателя: первый находится на первой окружности, а второй — в центре второй. По окружностям движутся точки так, что наблюдатели всё время смотрят на точку на своей окружности. Оказалось, что они поворачиваются с одинаковыми угловыми скоростями ω. Найдите отношение времени, за которое первая точка делает полный оборот на первой окружности, к соответствующему времени для второй точки на второй окружности.

Решение. Вторая точка движется с постоянной скоростью $v = \omega R_2$ и проходит полный круг за время

$$t_2 = \frac{2\pi R_2}{v} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad \textbf{(3 балла)}$$

Найдем скорость первой точки. Пусть наблюдатель находится в точке A на окружности. Проведем диаметр AO и луч AB, соединяющий наблюдателя с движущейся точкой B. Из геометрии $\omega t = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$, т. е. точка движется по окружности с угловой скоростью $\frac{d}{dt}\angle BOC = 2\omega$ **(5 баллов)**. Полный круг она проходит за время $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$.
Отношение времён равно 2. **(2 балла)**

Ф9.2 Даны два высоких сосуда, наполненные водой. В одном из них у поверхности удерживается маленький медный шарик, а в другом у дна удерживается деревянный шарик того же объема. В некоторый момент времени оба шарика отпускают. Как изменяется потенциальная энергия системы шарик + вода в обоих случаях? Пренебречь процессами установления скорости.

Решение. В процессе движения шариков в толще воды, в противоположную сторону движется «водный» шарик того же объема. **(5 баллов)** Поскольку плотность воды больше плотности дерева и меньше плотности меди, то центр масс системы опускается **(2 балла)**, что свидетельствует об уменьшении потенциальной энергии. **(3 балла)**

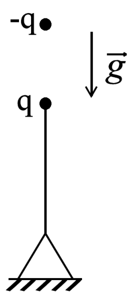
Ф9.3 Тело, движущееся по прямой, набирает скорость от нуля до v_0. Скорости $v_0/2$ тело достигло, двигаясь с ускорением $a_1 > 0$, а оставшийся набор скорости совершило с ускорением $a_2 > 0$. Найдите $a_{\text{ср}}$ — среднее ускорение тела, а также Δx — перемещение, которое совершило тело.

Решение. Скорость $v_0/2$ тело приобрело через $t_1 = \frac{v_0}{2a_1}$ после старта. Скорость v_0 была достигнута ещё через промежуток времени $t_2 = \frac{v_0}{2a_2}$. Среднее ускорение равно

$$a_{\text{ср.}} = \frac{\frac{v_0}{2a_1}\cdot a_1 + \frac{v_0}{2a_2}a_2}{\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)} = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}. \quad \textbf{(5 баллов)}$$

Перемещение равно $\frac{a_1t_1^2}{2} + \frac{v_0}{2}t_2 + \frac{at_2^2}{2} = \frac{v_0^2}{8a_1} + \frac{v_0^2}{4a_2} + \frac{v_0^2}{8a_2} = \frac{v_0^2}{8a_1} + \frac{3v_0^2}{8a_2}$. **(5 баллов)**

Ф9.4 Заряды q и $-q$ находятся на маленьких шариках, расположенных на одной вертикали. Шарик с зарядом q привязан нитью к неподвижной опоре, а его масса $m = 100$ г (см. рис.). Заряд $-q$ удерживают неподвижно внешней силой. Максимальное расстояние между шариками, при котором нить обрывается, равно $l_1 = 5$ см. Каким должно быть минимальное расстояние между шариками l_2, чтобы нижний шарик упал вниз? Предел упругости нити $T_{max} = 3$ Н, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Решение. Условие обрыва нити: $T_{max} + mg = \frac{kq^2}{l_1^2}, \Rightarrow kq^2 = l_1^2(T_{max} + mg)$. **(3 балла)**

Шарик падает, когда $mg = \frac{kq^2}{l_2^2}$. **(3 балла)** Подставляя сюда найденное выражение для произведения kq^2, получаем $\frac{T_{max}}{mg} + 1 = \frac{l_2^2}{l_1^2}$. **(3 балла)** Окончательно получаем $l_2 = l_1\sqrt{1 + \frac{T_{max}}{mg}} = 5\sqrt{1 + \frac{3}{0{,}1 \cdot 10}} = 10$ см. **(1 балл)**

M9.1 Решите уравнение $x^2 + \frac{1}{x^2 - 4} = 2\sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 4}}$.

Решение. Выделением полного квадрата уравнение с очевидностью сводится к $|x| = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$. **(2 балла)** Ясно, что искомые корни по модулю должны превосходить 2. **(1 балл)** Учитывая это ограничение, решим $x^2(x^2 - 4) = 1$, откуда $x^2 = 2 \pm \sqrt{5}$, и до отбора корней $x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{5}}$. С учётом ограничения, окончательно находим $x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}$. **(7 баллов)**
(Если приобретены лишние корни — снять по 3 балла за каждый.)

M9.2 Сколько способов разбить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по 2 туза?

Решение. Выберем первую половину, а вторая определится при этом автоматически. Выбрать два туза из четырёх можно C_4^2 способами, а половину карт из оставшихся C_{32}^{16} способами соответственно. Итого: $C_4^2 \cdot C_{32}^{16}$ способов.
(Комбинаторная ошибка — 0 баллов за задачу.)
(Ответ не досчитан до числа (оставлен в виде произведения факториалов или чисел сочетаний) — баллы не снимаются.)

M9.3 $ABCDEFGHIJKLMN$ — правильный четырнадцатиугольник. Докажите, что прямые AE, BG и CK пересекаются в одной точке.

Решение. Прямые AE, BG и CK содержат биссектрисы треугольника ACG. Это можно заметить, если рассмотреть описанную окружность четырнадцатиугольника, а затем воспользоваться вписанными углами и равенством дуг, стягиваемых одинаковыми сторонами этого четырнадцатиугольника.
(Доказательство того, что каждая из трёх прямых — биссектриса треугольника ACG: по 2 балла.)

M9.4 Положительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n ($n \geq 2$) образуют арифметическую прогрессию. Выразите величину $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n}$ через a_1, a_n и n.

Решение. Сделаем следующее преобразование:

$$\frac{1}{a_ka_{k+1}} = \frac{1}{d}\frac{a_{k+1} - a_k}{a_ka_{k+1}} = \frac{-1}{d} \cdot \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{-1}{d} \cdot \frac{1}{a_k}.$$

Тогда

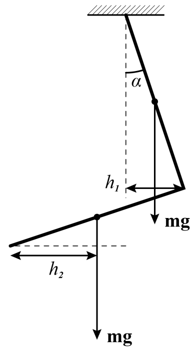
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_ka_{k+1}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

Ф10.1 Даны два высоких сосуда, наполненные водой. В одном из них у поверхности удерживается маленький медный шарик, а в другом у дна удерживается деревянный шарик того же объема. В некоторый момент времени оба шарика отпускают. Как изменяется потенциальная энергия системы шарик + вода в обоих случаях? Пренебречь процессами установления скорости.

Решение. В процессе движения шариков в толще воды, в противоположную сторону движется «водный» шарик того же объема. **(5 баллов)** Поскольку плотность воды больше плотности дерева и меньше плотности меди, то центр масс системы опускается **(2 балла)**, что свидетельствует об уменьшении потенциальной энергии. **(3 балла)**

Ф10.2 Однородный металлический стержень согнули пополам, образовав при этом угол в 90°. Затем полученную конструкцию подвесили за один из концов. Найдите угол между вертикалью и нижней половиной этого «угла», висящей свободно.

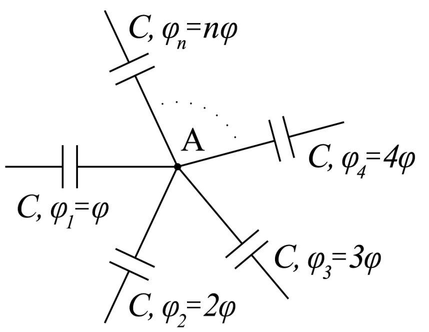
Решение. Обозначим длину каждой половинки прута за l, а массу m. Поскольку конструкция находится в равновесии, то моменты сил тяжести, действующие со стороны обеих половинок прута, равны, сами силы приложены к серединам соответствующих половинок. Введем h_1 и h_2. Очевидно, что $h_1 = l\sin\alpha$, $h_2 = \dfrac{l}{2}\cos\alpha$. Уравнение моментов приобретает вид $mg(l\cos\alpha - h_1 - h_2) = mg\dfrac{h_1}{2}$. **(7 баллов)** Подставляя выражения для h_1 и h_2, получаем ответ $\operatorname{ctg}\alpha = 3$ **(3 балла)**.



Ф10.3 В правильном тетраэдре $ABCD$, собранном из проволоки, отметили точку пересечения высот O и соединили со всеми четырьмя вершинами отрезками. Оказалось, что сопротивление каждого из отрезков между любой парой точек равно R. Найдите сопротивление между точками A и B.

Решение. В силу симметрии ток по отрезкам CO, DO, CD не течёт **(5 баллов)**. Тогда эквивалентная схема состоит из подключенных параллельно резисторов $R, 2R, 2R, 2R$ **(2 балла)**. Тогда $R_\Sigma = \dfrac{2}{5}R$ **(3 балла)**.

Ф10.4 На рисунке n незаряженных конденсаторов равной ёмкости соединены в одном узле A. Затем эти конденсаторы заряжают до разностей потенциалов, образующих арифметическую прогрессию: потенциалы с другой стороны от точки A у первого конденсатора $\varphi = 1$ В, у второго $2\varphi = 2$ В и т. д. до $n\varphi$. Определите потенциал в точке A.



Решение. Сумма зарядов конденсаторов равна нулю: $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 0$. **(2 балла)** Для разностей потенциалов на каждом конденсаторе имеем:

$$\begin{cases} \varphi_A - \varphi = Cq_1, \\ \varphi_A - 2\varphi = Cq_2, \\ \dots, \\ \varphi_A - n\varphi = Cq_n. \end{cases}$$

(5 баллов)

Складываем эти уравнения: $n\varphi_A = \dfrac{n(n+1)}{2}\varphi$. **(2 балла)** Теперь поделим обе части на n, получим ответ: $\varphi_A = \dfrac{n+1}{2}\varphi$ **(1 балл)**.

M10.1 В стране 7 городов, некоторые из которых соединены дорогами с двусторонним движением. Может ли оказаться, что из одного города ведёт ровно одна дорога, из трёх ровно две, а из оставшихся — ровно по 5?

Решение. Рассмотрим три города A, B, C, из которых ведёт по 5 дорог. Из каждого из них ведёт не менее трёх дорог в остальные. При этом в остальные города может входить не более $2 + 2 + 2 + 1 = 7$ дорог, поэтому такая ситуация невозможна.

M10.2 Пусть $\sigma(k)$ — сумма делителей натурального числа k. Докажите, что

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) = 1\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + n\left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Решение. Натуральное число $a \leq n$ входит в сумму $\sigma(k)$, если только если k делится на a, и поэтому оно суммируется в левой части $\left\lfloor \dfrac{n}{a} \right\rfloor$ раз.

M10.3 В остроугольном треугольнике ABC ($AB \neq AC$) биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке V, а высота этого угла пересекает эту же сторону в точке D. Пусть описанная окружность треугольника ADV пересекает стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что BE, CF и AD пересекаются в одной точке.

Решение. AV — диаметр окружности. Поскольку $BD \cdot BV = BF \cdot BA$ **(1 балл)**, $CD \cdot CV = CE \cdot CA$ **(1 балл)**, а по теореме о биссектрисе $BV : CV = BA : CA$ **(2 балла)**, мы можем получить равенство

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{BV}{CV} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{BA}{CA}. \quad \textbf{(2 балла)}$$

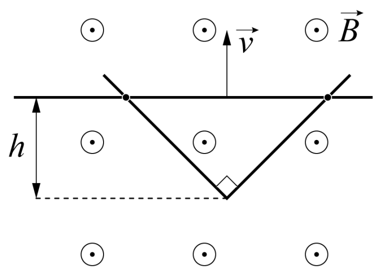
Несложно убедиться в том, что условие Чевы выполняется: $FA = EA$ **(2 балла)** (AV — диаметр, а дуги FV и EV равны), и поэтому

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1. \quad \textbf{(2 балла)}$$

M10.4 Последовательность a_n определена следующим образом: $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$ при $n \geq 2$. Докажите, что при всяком натуральном m число $a_m a_{m+1}$ также является элементом последовательности.

Решение. Решение этого рекуррентного соотношения единственно **(2 балла)**, а поэтому его можно подобрать: $a_n = n^2 - 3$ **(6 баллов)**. Тогда $a_m a_{m+1} = a_{m^2+m+3}$ **(2 балла)**.
(Если решение угадано, а ссылки на единственность нет, то за него вместо 6 баллов следует поставить 3 балла.)

Ф11.1 Горизонтально расположенный проводящий прямой угол находится в однородном вертикальном магнитном поле B. По сторонам этого угла с постоянной скоростью v движется проводящий стержень так, что угол и отрезок этого стержня в любой момент времени образуют равнобедренный треугольник (см. рис.). В начальный момент $t = 0$ высота h этого треугольника равна нулю. Скорость v стержня поддерживается постоянной с помощью внешней силы $F = F(t)$, направленной параллельно v. Найдите абсолютную величину работы этой внешней силы за время T. Сопротивление единицы длины стержня или стороны угла постоянно и равно r.



Решение: В момент времени t площадь треугольника равна $S(t) = h^2 \operatorname{tg}\alpha = h^2$ **(1 балл)**. Возникающая ЭДС по модулю равна

$$\mathscr{E} = 2Bv^2 \operatorname{tg}\alpha t = IR = 2Ir\left(\frac{h}{\cos\alpha} + h\operatorname{tg}\alpha\right) = 2Ir(1+\sqrt{2})vt \Rightarrow I = \frac{Bv^2}{(1+\sqrt{2})r}. \textbf{(4 балла)}$$

Внешняя сила уравновешивает силу Ампера, поэтому $F(t) = BIl = \dfrac{2B^2v^3}{(1+\sqrt{2})r}t$ **(2 балла)**. Работа внешней силы равна площади под графиком $F(t)$ на отрезке $[0, T]$, т. е. площади прямоугольного треугольника: $A = \dfrac{B^2v^3}{(1+\sqrt{2})r}T^2$ **(3 балла)**.

Ф11.2 В процессе над молем гелия, в котором среднее значение кинетической энергии было пропорционально занимаемому газом объему, среднеквадратичная скорость движения атомов увеличилась с $v_1 = 100$ м/с до $v_2 = 200$ м/с. Найдите работу газа в этом процессе.

Решение. Из уравнения МКТ запишем $PV = \dfrac{2}{3}N\overline{E} = \dfrac{1}{3}Nm\overline{v^2}$ **(3 балла)**. С газом проводится процесс, в котором $\overline{E} = \alpha V$, откуда $P = \dfrac{2}{3}N\alpha = const$ **(3 балла)**. Работа в изобарном процессе равна $P\Delta V$, Поэтому нужно найти изменение объема. Из того же уравнения МКТ: $\Delta V = \dfrac{m\Delta\overline{v^2}}{2\alpha}$ **(2 балла)**, откуда $A = \dfrac{1}{3}Nm\Delta\overline{v^2} = Mv_1^2 = 40$ Дж **(2 балла)**.

Ф11.3 Восемь одинаковых точечных зарядов q находятся в вершинах двух одинаковых правильных тетраэдров с ребром a, расположенных друг от друга на расстоянии, существенно превышающем a. Какую работу необходимо совершить, чтобы поместить эти заряды в вершины куба со стороной a?

Решение. До изменения конфигурации энергия: $W_1 = 2 \cdot 6\dfrac{kq^2}{a}$ **(4 балла)**.

После образования куба: $W_2 = \dfrac{kq^2}{a}\left(\dfrac{12}{1} + \dfrac{12}{\sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$ **(4 балла)**. Тогда находим работу **(2 балла)**:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{kq^2}{a}\left(\frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \approx 10{,}79\frac{kq^2}{a}.$$

Ф11.4 В облаке пыли, плотность которого в каждой точке одинакова, по прямой движется ракета с постоянной скоростью. Пыль от облака, которая встречается на пути ракеты, оседает на самой ракете. Во сколько раз нужно увеличить силу тяги двигателей, чтобы скорость движения ракеты увеличилась в 2 раза?

Решение. Пусть S — площадь поперечного сечения ракеты, m — её масса в некоторый момент времени, а ρ — плотность облака пыли.

Предположим, что ракета прошла некоторое расстояние L. Тогда ее масса после этого станет равной $M = m + \rho SL$. **(2 балла)**

Запишем закон сохранения импульса: $F \cdot \Delta t = (m + \rho SL)v - mv$ **(2 балла)**, причем $\Delta t = \dfrac{L}{v}$, а значит, $F \cdot \dfrac{L}{v} = \rho SLv \Rightarrow F = kv^2$ **(4 балла)**.

Получаем $\dfrac{F_2}{F_1} = \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2 = 4 \Rightarrow$ сила тяги увеличится в 4 раза **(2 балла)**.

M11.1 Сколько способов расставить 2 одинаковые ладьи на шахматное поле 8×8 так, чтобы они не били друг друга, причем хотя бы одна ладья стояла на какой-нибудь одной из двух диагоналей?

Решение. Если на диагоналях стоит ровно одна ладья, то выбрать её положение можно 16 способами. При этом второй ладье запрещено находиться на 16 диагональных клетках, а также на $6+6$ недиагональных клетках, но на той же горизонтали или вертикали, что и первая ладья. Итого в этом случае получаем $16 \cdot (64 - 16 - 12) = 16 \cdot 36$ способов. **(4 балла)**
Если на диагоналях стоят обе ладьи, то выбрать положение первой можно 16 способами, положение второй можно выбрать уже $16 - 3 = 13$ способами, а затем нужно разделить на 2, поскольку ладьи одинаковы: итого $8 \cdot 13$ способов. **(4 балла)**
В итоге получаем $16 \cdot 36 + 8 \cdot 13$ способов. **(2 балла)**
(Комбинаторная ошибка в одном из двух случаев — 0 баллов за соответствующий случай; в этом случае последние 2 балла за сумму также не начисляются.)

M11.2 Пусть $\tau(k)$ — число делителей натурального числа k. Докажите, что

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Решение. Натуральное число $a \leq n$ подсчитывается в числе $\tau(k)$, если только если k делится на a, и поэтому оно учитывается в левой части столько раз, сколько чисел k кратны a, т. е. $\left\lfloor \dfrac{n}{a} \right\rfloor$ раз.

M11.3 Точки A и B лежат на окружности ω, а точка P выбрана на продолжении отрезка AB за точку B. Прямая PT касается ω в точке T и пересекает касательную к ω, проходящую через A, в точке D, а касательную к ω, проходящую через B, в точке C. Известно, что $AB = 7$, $BC = 2$, $AD = 3$. Вычислите BP.

Решение. Теорема Менелая, применённая к треугольнику CDQ и прямой AB, позволяет записать

$$\frac{DA}{AQ} \cdot \frac{QB}{BC} \cdot \frac{CP}{PD} = \frac{CP}{CP+5} \cdot \frac{3}{2} = 1,$$

откуда $CP = 10$ **(5 баллов)**. Остаётся воспользоваться тем, что $PT^2 = PB \cdot PA$ **(2 балла)**: $144 = x(x+7)$, откуда $x = 9$ **(3 балла)**.

M11.4 Пусть a_0 — натуральное число, а $a_n = 5a_{n-1} + 4$ при $n \geq 1$. Можно ли выбрать a_0 так, чтобы a_{54} было кратно 2022?

Решение. Найдем a_n:

$$a_n = 4 + 5 \cdot (4 + 5a_{n-2}) = 4 + 5 \cdot 4 + 5^2 \cdot (4 + 5a_{n-3}) = \ldots =$$

$$= 4 \cdot (1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{n-1}) + 5^n a_0 = 4 \cdot \frac{5^n - 1}{5 - 1} + 5^n a_0 = (a_0 + 1) \cdot 5^n - 1. \quad \textbf{(5 баллов)}$$

Поскольку диофантово уравнение $5^{54}b - 1 = 2022k$ разрешимо (5^{54} и 2022 взаимно просты), требуемые a_0 существуют (и их бесконечно много) **(5 баллов)**.