«Физтех. Бизнес»

Конкурс	**9 класс, вариант 1**
Количество заданий	**5**
Сумма баллов	**80**
Время написания	**240 минут**

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов во всех задачах бесконечно делимыми. Количества фирм и людей могут быть только целыми.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

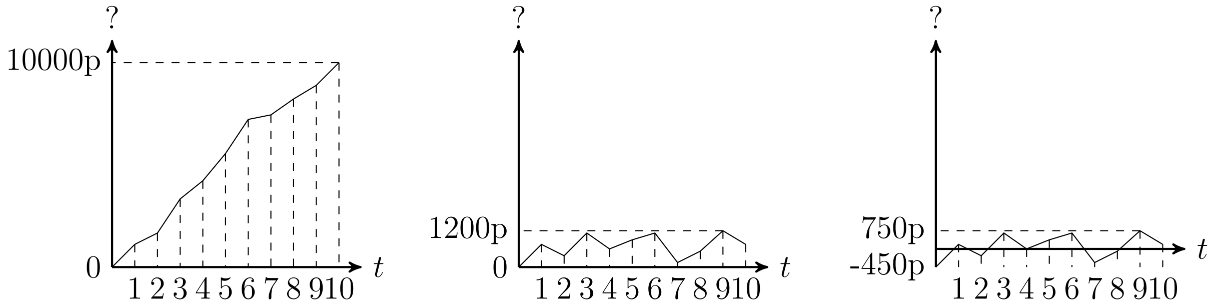
Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все необщеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Удачи!

Заключительный этап олимпиада «Физтех. Бизнес». Задачи.

1. Анализ графиков

Некоторый бизнесмен по имени Лука решил открыть свой собственный бизнес по продаже шаурмы. Прошло 10 дней с его открытия, и его бизнес-аналитики построили три графика, но, к сожалению, забыли подписать одну из осей. Вы знаете, что по оси t отложено количество дней, которое прошло с открытия, а всего было нарисовано три графика: дневная выручка, дневная прибыль и кумулятивная выручка (суммарная выручка за t дней). Все три переменные измеряются в рублях.



(a) (3 балла) Определите и *объясните* на каком графике что изображено. *(Считайте что самый левый график - первый, средний - второй, а самый правый - третий.)*

(b) (5 баллов) Допустим, что издержки в каждый день были одинаковыми. Найдите величину ежедневных издержек.

(c) (8 баллов) Определите, какую прибыль заработал Лука за 10 дней.

Решение:

а) Первый график - кумулятивная выручка (так как не убывает), второй график - дневная выручка (так как не отрицательна, но убывает), третий график - прибыль (так как бывает отрицательной).

б) Из графика видно, что при $t = 9$ выручка 1200р, а прибыль 750р. Значит ежедневные издержки составляют 1200р-750р=450р. (аналогично можно было использовать $t = 0$)

в) Так как из пункта (б) ежедневные издержки составляют 450р, то за 10 дней они составляют 4500р. Суммарная выручка за 10 дней из первого графика составляет 10000р, итого суммарная прибыль равна 10000р-4500р=5500р.

2. Тройственный союз

Тройственный союз - страны, которые объединились с целью улучшения своих производственных возможностей. У союза есть один универсальный ресурс - труд, всего в союзе $L = 120$ человеко-часов. Труд в союзе позволяет ловить рыбу - кильку - K, путассу - P, восточного тунца T. Лов тунца самый сложный: для того, чтобы поймать 1 тунца нужно 4 человеко-часа. Путассу ловится лучше: на поимку одной рыбы требуется 2 человеко-часа. Килька очень чувствительна к наличию хищников(тунцов) и других рыб(в данном случае - путассу). На поимку двух килек всегда нужен один человеко-час. Но если вообще не ловить другую рыбу, кильки в океане будет мало, всего 30 штук (более 30 штук поймать не удасться). Каждый пойманный тунец увеличивает максимальное количество пойманных килек на 4 штуки, а каждая пойманная путассу - на 1.

(a) (3 балла) Предположим, что тройственный союз вообще не хочет ловить кильку. Постройте МПВ (Множество Производственных Возможностей, все комбинации количеств рыб, доступные для вылова) Тройственного союза в координатах $P - T$ (путассу - восточный тунец).

(b) (5 баллов) Предположим, что Тройственному союзу нужно выловить ровно $T = 20$ единиц восточного тунца. Постройте МПВ Тройственного союза в координатах $(K - P)$ (килька - путассу).

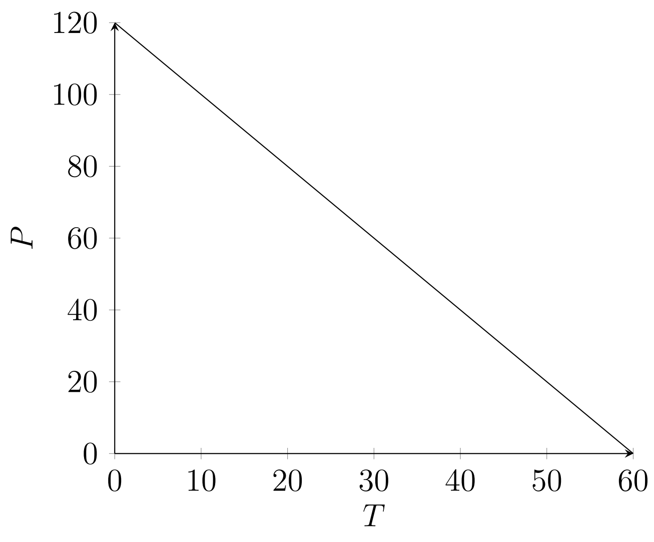
(c) (8 баллов) Предположим, что Тройственному союзу нужно выловить ровно $P = 20$ единиц путассу. Постройте МПВ тройственного союза в координатах $(K - T)$ (килька - восточный тунец).

Решение:

a) Если в тройственном союзе не надо ловить кильку, то труд, затраченный на кильку тоже равен нулю. Следовательно за $L = 1$ человеко-час будет поймана или 1/2 единица путассу или 1/4 единиц тунца.

Выпишем производственные функции $L_T = 4T$, $L_P = 2P$. Выпишем ограничение на ресурсы, оно и будет КПВ: $L_T + L_P = 120 \Rightarrow 4T + 2P = 240$

Изобразим это на графике:

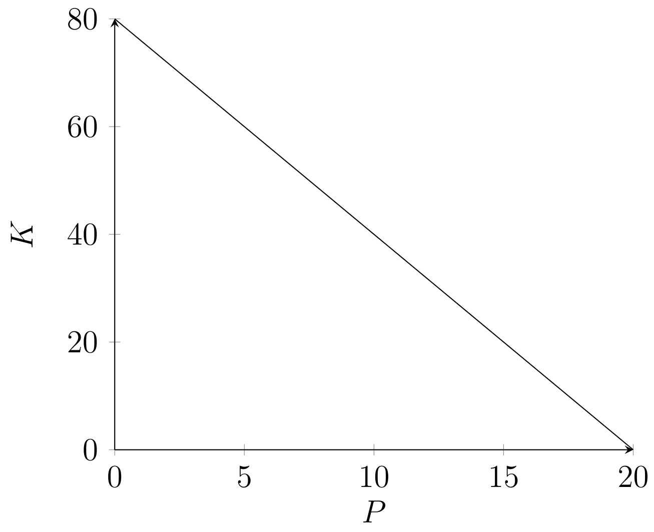


б)

Если Было выловлено 20 единиц восточного тунца, то на это было потрачено $20 *$

$4 = 80$ человеко-часов. Тогда количество труда, оставшееся в стране равно $L = 120 - 80 = 40$ человеко-часов. Максимальное количество кильки, которую можно поймать не ловя другую рыбу будет равно $30 + 20 * 4 = 110$. Заметим, что количество кильки явно не будет выходить за ограничение, поэтому построим МПВ, выписав уравнение ограничение. $L_k + L_p = 40 \Rightarrow \dfrac{K}{2} + 2P = 40$.

И изобразим это на графике:

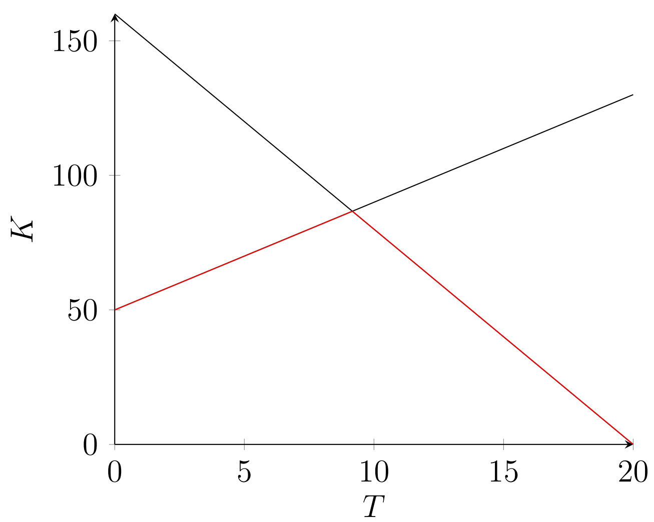


c)

Если Было выловлено 20 единиц путассу, то на это было потрачено $20 * 2 = 40$ человеко-часов. Тогда количество труда, оставшееся после поимки $L = 120 - 40 = 80$. Максимальное количество кильки, которую можно поймать не ловя другую рыбу будет равно $30 + 20 * 1 = 50$. Заметим, что 80 единиц труда позволят выловить 160 единиц кильки, что меньше, чем ограничение. Поэтому, МПВ будет иметь возрастающий участок, когда, вылавлия путассу количество кильки, живущее в океане будет увеличиваться.

Найдем точку, в которой КПВ пойдет от возрастания к убыванию. Для этого поймем, когда для каких значений P ограничение на K выполняется. $(80 - 4T) * 2 = K_{max}$ - ограничение по труду. $50 + 4T = K_{max}$ - ограничение по количеству рыбы в океане.

Изображаем оба графика и берем нижнюю огибающую - это и будет итоговая МПВ(предварительно вычислив точку пересечения ограничений: $K = 86\frac{2}{3}, T = 9\frac{1}{6}$).



3. Чебурашка и Крокодил Гена

Чебурашка учится в школе и на переменах покупает в буфете булочки с творогом (x) и пакетированный апельсиновый сок (y). Булочка стоит 40 рублей, а сок – 30 рублей. Крокодил Гена даёт ему 900 рублей на неделю, и Чебурашка тратит свои деньги только на покупку булочек и сока. Функция полезности Чебурашки имеет вид: $U = x \cdot y$, где x и y – количество булочек с творогом и пакетиков сока соответственно. Чебурашка может покупать только целое число булочек и соков.

(a) (3 балла) Некоторые числа в таблице предпочтений Чебурашки обозначены буквами. Восстановите все пропуски, для каждой буквы напишите, какое число она обозначает, если учитывать, что Чебурашка не может потратить больше 900 рублей, но все деньги будет тратить на повышение своей полезности.

Купленные булочки (за неделю)	Купленные соки (за неделю)	Полезность Чебурашки
22	$\boldsymbol{a}$	0
21	2	42
19	4	76
$\boldsymbol{b}$	6	$\boldsymbol{c}$
17	7	119
16	8	$\boldsymbol{d}$
12	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{f}$
11	$\boldsymbol{g}$	$\boldsymbol{h}$
9	$\boldsymbol{i}$	162
8	19	152
6	21	$\boldsymbol{j}$
5	23	115
3	26	78
2	27	54
$\boldsymbol{k}$	29	$\boldsymbol{l}$
0	30	0

(b) (5 баллов) Сколько булочек и соков нужно купить Чебурашке, чтобы получить максимальную полезность? Считайте, что Чебурашка выбирает только наборы, представленные в таблице.

(c) (8 баллов) Из-за повышения издержек на поставку соков, буфет поднял цену на них на 10 рублей, но цену на булочки снизил на 12 рублей из-за низкого спроса. Определите, сможет ли Чебурашка теперь получить полезность не меньшую, чем до изменения цен.

Решение:

a) Запишем бюджентое ограничение: $40x + 30y \leqslant 900$

Так как полезность монотонно возрастает и по x, и по y, Чебурашка будет тратить весь свой доход: $40x + 30y = 900$.

Если $x = 22 \Rightarrow y = \dfrac{900 - 40 * 22}{30} = 0$, это так же можно было получить из функции полезности: $U = x * y = 22 * y = 0 \Rightarrow y = 0$. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Если $y = 6 \Rightarrow x = \dfrac{900 - 6 * 30}{40} = 18$ тогда $U = x * y = 18 * 6 = 108$. $\mathbf{b} = \mathbf{18}$, $\mathbf{c} = \mathbf{108}$.

Если $x = 16$, а $y = 8 \Rightarrow U = x * y = 16 * 8 = 128$. $\mathbf{d} = \mathbf{128}$.

Если $x = 12 \Rightarrow y = \dfrac{900 - 12 * 40}{30} = 14 \Rightarrow U = x * y = 12 * 14 = 168$. $\mathbf{e} = \mathbf{14}$, $\mathbf{f} = \mathbf{168}$.

Если $x = 11 \Rightarrow y = \dfrac{900 - 11 * 40}{30} = 15\dfrac{1}{3}$, но Чебурашка может покупать только целое число булочек и сока $\Rightarrow y = 15$, тогда $U = x * y = 11 * 15 = 165$. $\mathbf{g} = \mathbf{15}$, $\mathbf{h} = \mathbf{165}$.

Если $x = 9$, а $U = 162 \Rightarrow y = \dfrac{162}{9} = 18$. $\mathbf{i} = \mathbf{18}$.

Если $x = 6$, а $y = 21 \Rightarrow U = x * y = 6 * 21 = 126$. $\mathbf{j} = \mathbf{126}$.

Если $y = 29 \Rightarrow x = \dfrac{900 - 30 * 29}{40} = 0\dfrac{3}{4}$, но Чебурашка может покупать только целое число булочек и сока $\Rightarrow x = 0$, тогда $U = x * y = 0 * 29 = 0$. $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{l} = \mathbf{0}$.

b) Необходимо найти наибольшее значение полезности из представленных в таблице - самую большую полезность Чебурашка получит, если потребит **12 булочек и 14 соков, $\mathbf{U} = \mathbf{168}$**.

c) Новая цена булочки теперь равна $P_x = 40 - 12 = 28$, новая цена сока теперь равна $P_y = 30 + 10 = 40$. Запишем новое бюджетное ограничение: $28x + 40y = 900$. Чтобы проверить, сможет ли Чебурашка получить полезность не меньше 168, можно промаксимизировать полезность на бюджетном ограничении (учитывая, что количество соков и булочек целое) - если максимальная полезность будет больше, значит, полезность не менее 168 возможно получить, если же максимальная полезность будет меньше 168, то Чебурашка не сможет.

Решим систему:

$$\begin{cases} U = x * y -> max \\ 28x + 40y = 900 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Из бюджетного ограничения $y = \dfrac{900 - 28x}{40} = 22.5 - 0.7x \Rightarrow U = x * y = x * (22.5 - 0.7x) = -0.7x^2 + 22.5x$, максимизируем по x, это парабола ветвями вниз, максимум в вершине $\Rightarrow x^* = \dfrac{22.5}{2 * 0.7} = \dfrac{225}{14} = 16\dfrac{1}{14}$ - нецелое число, Чебурашка сможет приобрести только целое, значит $x^* = 16$ или $x^* = 17$, тогда максимум $y = 22.5 - 0.7 * 16 = 11.3$ 11 или $y^* = 22.5 - 0.7 * 17 = 10.6$ 10. Тогда $U_{max} = max(16 * 11; 17 * 10) = max(176; 170) = 176 > 168$. Максимальный уровень полезности всё больше максимальной полезности до изменения цен $\Rightarrow$ **Да, Чебурашка сможет, его полезность остаться без изменений или вырасти**

4. Я у мамы инвстр

Юный экономист Рэм решил открыть свой бизнес по продаже лимонадов на пляже в одном небезызвестном курорте города Тамлов. Каждый вид лимонада имеет свой номер. Так как Рэм – экономист, он придумал необычную модель ценообразования на свои лимонады. А именно, если какой-то из лимонадов покупает 1 потребитель, то цена этого лимонада на следующую единицу растёт на 1%, а если лимонад не покупают в течение 10 минут ни один из потребителей, то его цена наоборот падает на 1%. После чего счётчик минут обнуляется и если его снова не покупают в течение 10 минут, то цена падает ещё на 1% и так далее.

(a) (3 балла) Допустим, ровно в 10 утра Саша купил у Рэма 1 единицу лимонада под номером i, сейчас на часах 10:15 утра того же дня и кроме Саши сегодня утром никто лимонад под номером i не покупал. Увеличилась, уменьшилась или не изменилась цена этого лимонада? Ответ объясните.

(b) (5 баллов) Опишите потенциальные бизнес-преимущества идеи Рэма, почему его идея ценообразования может помочь ему заработать больше, чем если бы он продавал лимонад по единой цене? Приведите ровно 1 идею, если будет приведено больше - проверяться будет только первая.

(c) (8 баллов) С какими бизнес-рисками может столкнуть Рэм? Приведите ровно 2 аргумента, если будет приведено больше - проверяться будет только первые два.

Решение:

а) В 10:00 цена выросла на 1%, после чего в 10:10 по условию задачи упала на 1%. Итого новая цена составила долю $1.01 * 0.99 = 0.9999$ от старой цены, то есть цена уменьшилась.

б) Возможны следующие идеи:

1. Данное ценообразование носит необычный экономический характер и может являться чем-то новым для потребителей, что может служить дополнительной рекламой для бизнеса Рэма.

2. Ценообразование из условия задачи позволяет Рэму продавать дороже более востребованные товары и дешевле те товары, спрос на которые не велик. Таким образом бизнесмену нет необходимости тратить силы на анализ рынка, так как он использует рыночной ценообразование.

3. Более высокая цена востребованного лимонада может помочь Рэму избежать дефицита востребованного товара, чем можно повысить лояльность потребителей и избежать профцита невостребованного товара, чем можно избежать издержек на непроданный товар.

в) Возможны следующие идеи:

1. Сложное ценообразование может отпугнуть клиентов.

2. Возможна потеря прибыли или работа в убыток, если выбранное понижение цены слишком большое или слишком частое.

3. Из-за отсутствия потолка цены, цена на лимонад может оказаться слишком высокой, из-за чего его никто не купит.

5. Борьба с монополистом

Не так давно рынок услуг такси в Москве был монополизирован одной небезызвестной компанией «Индекс». Давайте рассмотрим её деятельность поближе:

Пусть на рынке есть три группы потребителей, которые «Индекс» отлично отличает друг от друга: молодые, взрослые и пожилые. Спрос каждой группы имеет следующий вид: $Q^d_{young} = 100 - 4P$, $Q^d_{adult} = 80 - P$, $Q^d_{eldery} = 60 - 1.5P$. «Индекс» может назначать разные цены каждой группе. Издержки компании имеют вид: $TC = 8Q + 10$.

(a) (3 балла) Найдите, какие цены установит монополист каждой группе.

(b) (5 баллов) Государство, недовольное слишком высокими затратами населения, решает ввести потолок цены на уровне 30 д.е. Определите, какие цены установит монополист каждой группе в таком случае.

(c) (8 баллов) Государство хочет рассчитать оптимальный уровень потолка цены, и для этого ему нужно оценить, как введение потолка цены влияет на объем продаж монополиста. Найдите функцию $Q = f(\overline{P})$, показывающую, как общий объем продаж Q зависит от введенного потолка цены $\overline{P}$.

Решение:

a) Запишем прибыль монополиста, предполагая, что он работает на всех рынках: $\pi = TR_{young} + TR_{adult} + TR_{eldery} - TC(Q_{young} + Q_{adult} + Q_{eldery}) = \dfrac{100Q_y - Q_y^2}{4} + 80Q_a - Q_a^2 + \dfrac{60Q_e - Q_e^2}{1.5} - 8(Q_y + Q_a + Q_e) - 10 = 17Q_y - 0.25Q_y^2 + 72Q_a - Q_a^2 + 32Q_e - \dfrac{2}{3}Q_e^2 - 10$, максимизируем по каждому количеству, заметим, что прибыль - это три независимые параболы ветвями вниз, максимумы в вершине:

$$Q_y^* = \frac{17}{0.5} = 34,\ Q_a^* = \frac{72}{2} = 36,\ Q_e* = \frac{32*3}{4} = 24 \Rightarrow$$

$$\text{P}_y^* = \frac{100-34}{4} = 16,5,\ P_a^* = 80 - 36 = 44,\ P_e^* = \frac{60-24}{1.5} = 24$$

Аналогичный результат можно было получить при решение через предельные величины:

$MC = TC'Q = 8$ - константа, поэтому можем по отдельности приравнять убывающие по Q MR к MC и получить оптимум:

$$MR_y = 25 - 0.5Q_y = 8 \Rightarrow Q_y^* = 34 \Rightarrow P_y^* = 16.5$$

$$MR_a = 80 - 2Q_a = 8 \Rightarrow Q_a^* = 36 \Rightarrow P_a^* = 44$$

$$MR_e = 40 - \frac{4}{3}Q_e = 8 \Rightarrow Q_y^* = 24 \Rightarrow P_y^* = 24$$

b) Теперь есть $\overline{P} = 30 \Rightarrow P^* \leqslant 30$:

$P_y^* = 16.5 < 30 \Rightarrow$ она останется прежней, $P_y^* = 16.5$

$P_a^* = 44 > 30 \Rightarrow$ она поменяется и станет равна граничное, потолочной цене (так как монополисту выгодно назначать цену как можно более приближенную к 44 из доступных, а это 30), $P_a^* = 30$

$P_e^* = 24 < 30 \Rightarrow$ она останется прежней, $P_e^* = 24$

c) Если на рынке потолок цены выше монопольной цены, то количество, которое продает монополист, будет просто монопольным. Однако, если потолок цены будет ни-же монопольной цены, то монополист будет назначать цену, наиболее приближенную к оптимальной монопольной - то есть саму границу $\overline{P}$, тогда его выпуск будет соответствовать тому количеству, которые хотят приобрести потребители при заданной цене, иначе говоря, выпуск монополиста будет равен $Q^d(\overline{P})$ (а предельная выручка будет равна самой $\overline{P}$, так как теперь с каждой единицы продукции монополист получает фиксированную P = $\overline{P}$). Но так будет продолжаться до тех пор, пока предельные издержки монополиста будут меньше предельной выручки (чтобы изменение прибыли было положительным), тогда это верно до тех пор, пока $\overline{P} \leqslant 8$; если предельная выручка станет меньше предельных затрат, то монополист уйдет с рынка.

Итак, на рынке у монополиста есть три монопольные цены: $P_y^* = 16.5$, $P_a^* = 44$ и $P_e^* = 24$

1. $\overline{P} \geqslant 44 \Rightarrow$ все оптимальные цены остаются прежними, как и оптимальные выпуски: $Q = Q_y^* + Q_a^* + Q_e^* = 34 + 36 + 24 = 94$

2. $24 \leqslant \overline{P} \leqslant 44 \Rightarrow Q = Q_y^* + Q_a^d(\overline{P}) + Q_e^* = 34 + 80 - \overline{P} + 24 = 138 - \overline{P}$

3. $16.5 \leqslant \overline{P} \leqslant 24 \Rightarrow Q = Q_y^* + Q_a^d(\overline{P}) + Q_e^d(\overline{P}) = 34 + 80 - \overline{P} + 60 - 1.5\overline{P} = 174 - 2.5\overline{P}$

4. $8 \leqslant \overline{P} \leqslant 16.5 \Rightarrow Q = Q_y^d(\overline{P}) + Q_a^d(\overline{P}) + Q_e^d(\overline{P}) = 100 - 4\overline{P} + 80 - \overline{P} + 60 - 1.5\overline{P} = 240 - 6.5\overline{P}$

5. $\overline{P} \leqslant 8 \Rightarrow$ монополист не будет выходить на рынок, $Q = 0$

Итог:

$$Q^* = \begin{cases} 94; \overline{P} \geqslant 44 \\ 138 - \overline{P}; 24 \leqslant \overline{P} \leqslant 44 \\ 174 - 2.5\overline{P}; 16.5 \leqslant \overline{P} \leqslant 24 \\ 240 - 6.5\overline{P}; 8 \leqslant \overline{P} \leqslant 16.5 \\ 0; \overline{P} \leqslant 8 \end{cases} \tag{1}$$

«Физтех. Бизнес»

Конкурс	**9 класс, вариант 2**
Количество заданий	**5**
Сумма баллов	**80**
Время написания	**240 минут**

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов во всех задачах бесконечно делимыми. Количества фирм и людей могут быть только целыми.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

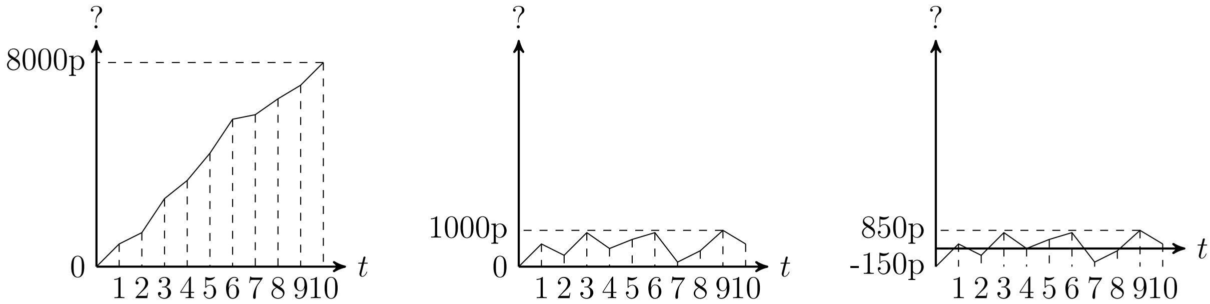
Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все необщеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Удачи!

Заключительный этап олимпиада «Физтех. Бизнес». Задачи.

1. Анализ графиков

Некоторый бизнесмен по имени Лука решил открыть свой собственный бизнес по продаже шаурмы. Прошло 10 дней с его открытия, и его бизнес-аналитики построили три графика, но, к сожалению, забыли подписать одну из осей. Вы знаете, что по оси t отложено количество дней, которое прошло с открытия, а всего было нарисовано три графика: дневная выручка, дневная прибыль и кумулятивная выручка (суммарная выручка за t дней). Все три переменные измеряются в рублях.



(a) (3 балла) Определите и *объясните* на каком графике что изображено. *(Считайте что самый левый график - первый, средний - второй, а самый правый - третий.)*

(b) (5 баллов) Допустим, что издержки в каждый день были одинаковыми. Найдите величину ежедневных издержек.

(c) (8 баллов) Определите, какую прибыль заработал Лука за 10 дней.

Решение:

а) Первый график - кумулятивная выручка (так как не убывает), второй график - дневная выручка (так как не отрицательна, но убывает), третий график - прибыль (так как бывает отрицательной).

б) Из графика видно, что при $t = 9$ выручка 1000р, а прибыль 850р. Значит ежедневные издержки составляют 1000р-850р=150р. (аналогично можно было использовать $t = 0$)

в) Так как из пункта (б) ежедневные издержки составляют 150р, то за 10 дней они составляют 1500р. Суммарная выручка за 10 дней из первого графика составляет 8000р, итого суммарная прибыль равна 8000р-1500р=6500р.

2. Тройственный союз

Тройственный союз - страны, которые объединились с целью улучшения своих производственных возможностей. У союза есть один универсальный ресурс - труд, всего в союзе $L = 240$ человеко-часов. Труд в союзе позволяет ловить рыбу - кильку - K, путассу - P, восточного тунца T. Лов тунца самый сложный: для того, чтобы поймать 1 тунца нужно 3 человеко-часа. Путассу ловится лучше: на поимку одной рыбы требуется 2 человеко-часа. Килька очень чувствительна к наличию хищников(тунцов) и других рыб(в данном случае - путассу). На поимку двух килек всегда нужен один человеко-час. Но если вообще не ловить другую рыбу, кильки в океане будет мало, всего 60 штук (более 60 штук поймать не удасться). Каждый пойманный тунец увеличивает максимальное количество пойманных килек на 4 штуки, а каждая пойманная путассу - на 1.

(a) (3 балла) Предположим, что тройственный союз вообще не хочет ловить кильку. Постройте МПВ (Множество Производственных Возможностей, все комбинации количеств рыб, доступные для вылова) Тройственного союза в координатах $P - T$ (путассу - восточный тунец).

(b) (5 баллов) Предположим, что Тройственному союзу нужно выловить ровно $T = 50$ единиц восточного тунца. Постройте МПВ тройственного союза в координатах $(K - P)$ (килька - путассу).

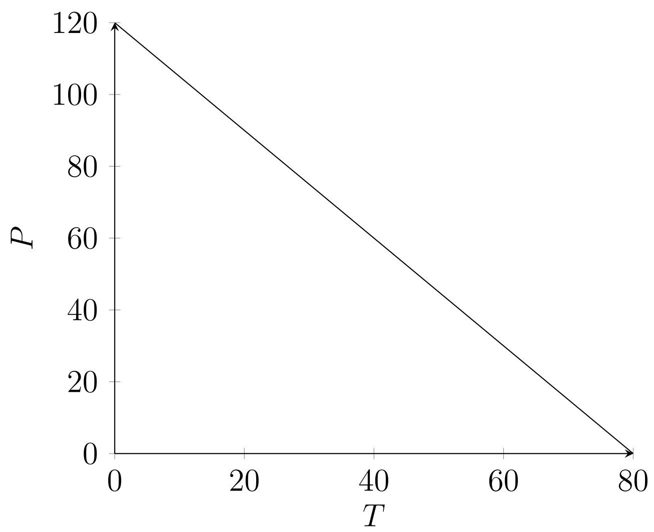
(c) (8 баллов) Предположим, что Тройственному союзу нужно выловить ровно $P = 50$ единиц путассу. Постройте МПВ Тройственного союза в координатах $(K - T)$ (килька - восточный тунец).

Решение:

a) Если в тройственном союзе не надо ловить кильку, то труд, затраченный на кильку тоже равен нулю. Следовательно за $L = 1$ человеко-час будет поймана или 1/2 единица путассу или 1/3 единиц тунца.

Выпишем производственные функции $L_T = 3T$, $L_P = 2P$. Выпишем ограничение на ресурсы, оно и будет КПВ: $L_T + L_P = 240 \Rightarrow 3T + 2P = 240$

Изобразим это на графике:

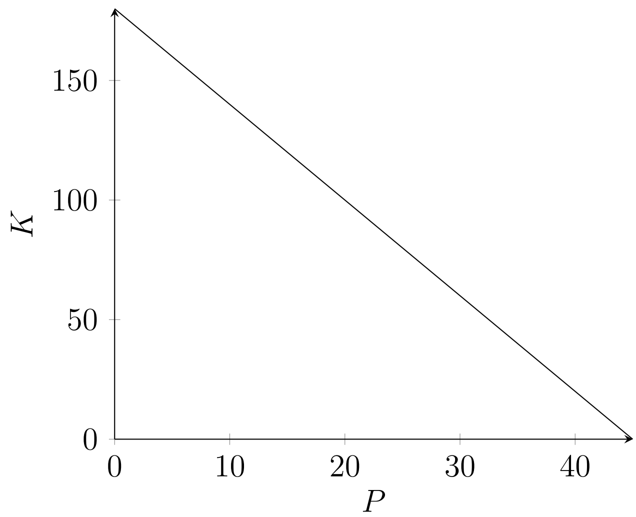


б)

Если Было выловлено 50 единиц восточного тунца, то на это было потрачено $50*3 =$

150 человеко-часов. Тогда количество труда, оставшееся в стране равно $L = 240 - 150 = 90$ человеко-часов. Максимальное количество кильки, которую можно поймать не ловя другую рыбу будет равно $60 + 50 * 4 = 260$. Заметим, что количество кильки явно не будет выходить за ограничение, поэтому построим МПВ, выписав уравнение ограничение. $L_k + L_p = 90 \Rightarrow \dfrac{K}{2} + 2P = 90$.

И изобразим это на графике:

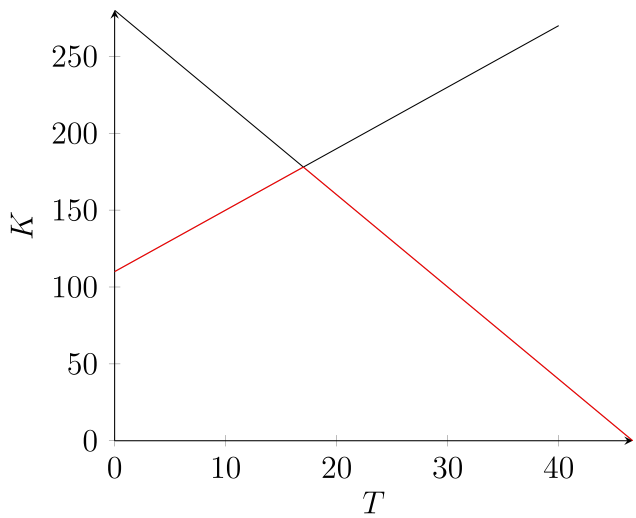


c)

Если Было выловлено 50 единиц путассу, то на это было потрачено $50 * 2 = 100$ человеко-часов. Тогда количество труда, оставшееся после поимки $L = 240 - 100 = 140$. Максимальное количество кильки, которую можно поймать не ловя другую рыбу будет равно $60 + 50 * 1 = 110$. Заметим, что 140 единиц труда позволят выловить 280 единиц кильки, что меньше, чем ограничение. Поэтому, МПВ будет иметь возрастающий участок, когда, вылавлия путассу количество кильки, живущее в океане будет увеличиваться.

Найдем точку, в которой КПВ пойдет от возрастания к убыванию. Для этого поймем, когда для каких значений P ограничение на K выполняется. $(140 - 3T) * 2 = K_{max}$ - ограничение по труду. $110 + 4T = K_{max}$ - ограничение по количеству рыбы в океане.

Изображаем оба графика и берем нижнюю огибающую - это и будет итоговая МПВ(предварительно вычислив точку пересечения ограничений: $K = 178, T = 17$).



3. Чебурашка и Крокодил Гена

Чебурашка учится в школе и на переменах покупает в буфете булочки с творогом (x) и пакетированный апельсиновый сок (y). Булочка стоит 35 рублей, а сок – 30 рублей. Крокодил Гена даёт ему 840 рублей на неделю, и Чебурашка тратит свои деньги только на покупку булочек и сока. Функция полезности Чебурашки имеет вид: $U = x \cdot y$, где x и y – количество булочек с творогом и пакетиков сока соответственно. Чебурашка может покупать только целое число булочек и соков.

(a) (3 балла) Некоторые числа в таблице предпочтений Чебурашки обозначены буквами. Восстановите все пропуски, для каждой буквы напишите, какое число она обозначает, если учитывать, что Чебурашка не может потратить больше 840 рублей, но все деньги будет тратить на повышение своей полезности.

Купленные булочки (за неделю)	Купленные соки (за неделю)	Полезность Чебурашки
24	$\boldsymbol{a}$	0
21	1	21
18	7	126
$\boldsymbol{b}$	8	$\boldsymbol{c}$
16	9	144
15	10	$\boldsymbol{d}$
12	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{f}$
10	$\boldsymbol{g}$	$\boldsymbol{h}$
9	$\boldsymbol{i}$	153
8	18	144
6	21	$\boldsymbol{j}$
5	22	110
3	24	72
2	25	50
$\boldsymbol{k}$	26	$\boldsymbol{l}$
0	28	0

(b) (5 баллов) Сколько булочек и соков нужно купить Чебурашке, чтобы получить максимальную полезность? Считайте, что Чебурашка выбирает только наборы, представленные в таблице.

(c) (8 баллов) Из-за повышения издержек на поставку соков, буфет поднял цену на них на 10 рублей, но цену на булочки снизил на 7 рублей из-за низкого спроса. Определите, сможет ли Чебурашка теперь получить полезность не меньшую, чем до изменения цен.

Решение:

а) Запишем бюджентое ограничение: $35x + 30y \leqslant 840$

Так как полезность монотонно возрастает и по x, и по y, Чебурашка будет тратить весь свой доход: $35x + 30y = 840$.

Если $x = 24 \Rightarrow y = \dfrac{840 - 35 * 24}{30} = 0$, это так же можно было получить из функции полезности: $U = x * y = 24 * y = 0 \Rightarrow y = 0$. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Если $y = 8 \Rightarrow x = \dfrac{840 - 8 * 30}{35} = 17\dfrac{1}{7}$, но Чебурашка может покупать только целое число булочек и сока $\Rightarrow x = 17$, тогда $U = x * y = 17 * 8 = 136$. **b = 17**, **c = 136**.

Если $x = 15$, а $y = 10 \Rightarrow U = x * y = 10 * 15 = 150$. **d = 150**.

Если $x = 12 \Rightarrow y = \dfrac{840 - 12 * 35}{30} = 14 \Rightarrow U = x * y = 12 * 14 = 168$. **e = 14**, **f = 168**.

Если $x = 10 \Rightarrow y = \dfrac{840 - 10 * 35}{30} = 16\frac{1}{3}$, но Чебурашка может покупать только целое число булочек и сока $\Rightarrow y = 16$, тогда $U = x * y = 10 * 16 = 160$. **g = 16**, **h = 160**.

Если $x = 9$, а $U = 153 \Rightarrow y = \dfrac{153}{9} = 17$. **i = 17**.

Если $x = 6$, а $y = 21 \Rightarrow U = x * y = 6 * 21 = 126$. **j = 126**.

Если $y = 26 \Rightarrow x = \dfrac{840 - 30 * 26}{35} = 1\frac{5}{7}$, но Чебурашка может покупать только целое число булочек и сока $\Rightarrow x = 1$, тогда $U = x * y = 1 * 26 = 26$. **k = 1**, **l = 26**.

b) Необходимо найти наибольшее значение полезности из представленных в таблице - самую большую полезность Чебурашка получит, если потребит **12 булочек и 14 соков, U = 168**.

c) Новая цена булочки теперь равна $P_x = 35 - 7 = 28$, новая цена сока теперь равна $P_y = 30 + 10 = 40$. Запишем новое бюджетное ограничение: $28x + 40y = 840$. Чтобы проверить, сможет ли Чебурашка получить полезность не меньше 168, можно промаксимизировать полезность на бюджетном ограничении (учитывая, что количество соков и булочек целое) - если максимальная полезность будет больше, значит, полезность не менее 168 возможно получить, если же максимальная полезность будет меньше 168, то Чебурашка не сможет.

Решим систему:

$$\begin{cases} U = x * y -> max \\ 28x + 40y = 840 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Из бюджетного ограничения $y = \dfrac{840 - 28x}{40} = 21 - 0.7x \Rightarrow U = x * y = x * (21 - 0.7x) = -0.7x^2 + 21x$, максимизируем по x, это парабола ветвями вниз, максимум в вершине $\Rightarrow x^* = \dfrac{21}{2 * 0.7} = \dfrac{21}{1.4} = 15 \Rightarrow y^* = 21 - 0.7 * 15 = 10,5$ - нецелое число, Чебурашка сможет приобрести максимум $y = 10$. Тогда $U_{max} = 15 * 10 = 150 < 168$. Так как оптимальное значение y^* оказалось нецелым, то стоит проверить и округление y^* до 11, уменьшив $x^* : y^* = 11 \Rightarrow x = \dfrac{840 - 40 * 11}{28} = 14\frac{2}{7}$ - нецелое число, Чебурашка сможет приобрести максимум $x = 14$. Тогда $U_{max} = 14 * 11 = 154 < 168$. Несмотря на то, что уровень полезности получился выше при потреблении $x^* = 14$ и $y^* = 11$, максимальный уровень полезности всё ещё меньше максимальной полезности до изменения цен $\Rightarrow$ **Нет, Чебурашка не сможет, его полезность упадет**

4. Я у мамы инвстр

Юный экономист Рэм решил открыть свой бизнес по продаже лимонадов на пляже в одном небезызвестном курорте города Тамлов. Каждый вид лимонада имеет свой номер. Так как Рэм – экономист, он придумал необычную модель ценообразования на свои лимонады. А именно, если какой-то из лимонадов покупает 1 потребитель, то цена этого лимонада на следующую единицу растёт на 2%, а если лимонад не покупают в течение 12 минут ни один из потребителей, то его цена наоборот падает на 2%. После чего счётчик минут обнуляется и если его снова не покупают в течение 12 минут, то цена падает ещё на 2% и так далее.

(a) (3 балла) Допустим, ровно в 9 утра Саша купил у Рэма 1 единицу лимонада под номером i, сейчас на часах 9:18 утра того же дня и кроме Саши сегодня утром никто лимонад под номером i не покупал. Увеличилась, уменьшилась или не изменилась цена этого лимонада? Ответ объясните.

(b) (5 баллов) Опишите потенциальные бизнес-преимущества идеи Рэма, почему его идея ценообразования может помочь ему заработать больше, чем если бы он продавал лимонад по единой цене? Приведите ровно 1 идею, если будет приведено больше - проверяться будет только первая.

(c) (8 баллов) С какими бизнес-рисками может столкнуть Рэм? Приведите ровно 2 аргумента, если будет приведено больше - проверяться будет только первые два.

Решение:

а) В 9:00 цена выросла на 2%, после чего в 9:12 по условию задачи упала на 2%. Итого новая цена составила долю $1.02 * 0.98 = 0.99960$ от старой цены, то есть цена уменьшилась.

б) Возможны следующие идеи:

1. Данное ценообразование носит необычный экономический характер и может являться чем-то новым для потребителей, что может служить дополнительной рекламой для бизнеса Рэма.

2. Ценообразование из условия задачи позволяет Рэму продавать дороже более востребованные товары и дешевле те товары, спрос на которые не велик. Таким образом бизнесмену нет необходимости тратить силы на анализ рынка, так как он использует рыночной ценообразование.

3. Более высокая цена востребованного лимонада может помочь Рэму избежать дефицита востребованного товара, чем можно повысить лояльность потребителей и избежать профцита невостребованного товара, чем можно избежать издержек на непроданный товар.

в) Возможны следующие идеи:

1. Сложное ценообразование может отпугнуть клиентов.

2. Возможна потеря прибыли или работа в убыток, если выбранное понижение цены слишком большое или слишком частое.

3. Из-за отсутствия потолка цены, цена на лимонад может оказаться слишком высокой, из-за чего его никто не купит.

5. Борьба с монополистом

Не так давно рынок услуг такси в Москве был монополизирован одной небезызвестной компанией «Индекс». Давайте рассмотрим её деятельность поближе:

Пусть на рынке есть три группы потребителей, которые «Индекс» отлично отличает друг от друга: молодые, взрослые и пожилые. Спрос каждой группы имеет следующий вид: $Q^d_{young} = 96 - 4P$, $Q^d_{adult} = 64 - P$, $Q^d_{eldery} = 48 - 1.5P$. «Индекс» может назначать разные цены каждой группе. Издержки компании имеют вид: $TC = 8Q + 10$.

(a) (3 балла) Найдите, какие цены установит монополист каждой группе.

(b) (5 баллов) Государство, недовольное слишком высокими затратами населения, решает ввести потолок цены на уровне 32 д.е. Определите, какие цены установит монополист каждой группе в таком случае.

(c) (8 баллов) Государство хочет рассчитать оптимальный уровень потолка цены, и для этого ему нужно оценить, как введение потолка цены влияет на объем продаж монополиста. Найдите функцию $Q = f(\overline{P})$, показывающую, как общий объем продаж Q зависит от введенного потолка цены $\overline{P}$.

Решение:

a) Запишем прибыль монополиста, предполагая, что он работает на всех рынках: $\pi = TR_{young} + TR_{adult} + TR_{eldery} - TC(Q_{young} + Q_{adult} + Q_{eldery}) = \dfrac{96Q_y - Q_y^2}{4} + 64Q_a - Q_a^2 + \dfrac{48Q_e - Q_e^2}{1.5} - 8(Q_y + Q_a + Q_e) - 10 = 16Q_y - 0.25Q_y^2 + 56Q_a - Q_a^2 + 24Q_e - \dfrac{2}{3}Q_e^2 - 10$, максимизируем по каждому количеству, заметим, что прибыль - это три независимые параболы ветвями вниз, максимумы в вершине:

$Q_y^* = \dfrac{16}{0.5} = 32$, $Q_a^* = \dfrac{56}{2} = 28$, $Q_e* = \dfrac{24 * 3}{4} = 18 \Rightarrow$

$\text{P}_y^* = \dfrac{96 - 32}{4} = 16$, $P_a^* = 64 - 28 = 36$, $P_e^* = \dfrac{48 - 18}{1.5} = 20$

Аналогичный результат можно было получить при решение через предельные величины:

$MC = TC'Q = 8$ - константа, поэтому можем по отдельности приравнять убывающие по Q MR к MC и получить оптимум:

$MR_y = 24 - 0.5Q_y = 8 \Rightarrow Q_y^* = 32 \Rightarrow P_y^* = 16$

$MR_a = 64 - 2Q_a = 8 \Rightarrow Q_a^* = 28 \Rightarrow P_a^* = 36$

$MR_e = 32 - \dfrac{4}{3}Q_e = 8 \Rightarrow Q_y^* = 18 \Rightarrow P_y^* = 20$

b) Теперь есть $\overline{P} = 32 \Rightarrow P^* \leqslant 32$:

$P_y^* = 16 < 32 \Rightarrow$ она останется прежней, $P_y^* = 16$

$P_a^* = 36 > 32 \Rightarrow$ она поменяется и станет равна граничное, потолочной цене (так как монополисту выгодно назначать цену как можно более приближенную к 36 из доступных, а это 32), $P_a^* = 32$

$P_e^* = 20 < 32 \Rightarrow$ она останется прежней, $P_e^* = 20$

c) Если на рынке потолок цены выше монопольной цены, то количество, которое продает монополист, будет просто монопольным. Однако, если потолок цены будет ни-же монопольной цены, то монополист будет назначать цену, наиболее приближенную к оптимальной монопольной - то есть саму границу $\overline{P}$, тогда его выпуск будет соответствовать тому количеству, которые хотят приобрести потребители при заданной цене, иначе говоря, выпуск монополиста будет равен $Q^d(\overline{P})$ (а предельная выручка будет равна самой $\overline{P}$, так как теперь с каждой единицы продукции монополист получает фиксированную Р $= \overline{P}$). Но так будет продолжаться до тех пор, пока предельные издержки монополиста будут меньше предельной выручки (чтобы изменение прибыли было положительным), тогда это верно до тех пор, пока $\overline{P} \leqslant 8$; если предельная выручка станет меньше предельных затрат, то монополист уйдет с рынка.

Итак, на рынке у монополиста есть три монопольные цены: $P_y^* = 16$, $P_a^* = 36$ и $P_e^* = 20$

1. $\overline{P} \geqslant 36 \Rightarrow$ все оптимальные цены остаются прежними, как и оптимальные выпуски: $Q = Q_y^* + Q_a^* + Q_e^* = 32 + 28 + 18 = 78$

2. $20 \leqslant \overline{P} \leqslant 36 \Rightarrow Q = Q_y^* + Q_a^d(\overline{P}) + Q_e^* = 32 + 64 - \overline{P} + 18 = 114 - \overline{P}$

3. $16 \leqslant \overline{P} \leqslant 20 \Rightarrow Q = Q_y^* + Q_a^d(\overline{P}) + Q_e^d(\overline{P}) = 32 + 64 - \overline{P} + 48 - 1.5\overline{P} = 144 - 2.5\overline{P}$

4. $8 \leqslant \overline{P} \leqslant 16 \Rightarrow Q = Q_y^d(\overline{P}) + Q_a^d(\overline{P}) + Q_e^d(\overline{P}) = 96 - 4\overline{P} + 64 - \overline{P} + 48 - 1.5\overline{P} = 208 - 6.5\overline{P}$

5. $\overline{P} \leqslant 8 \Rightarrow$ монополист не будет выходить на рынок, $Q = 0$

Итог:

$$Q^* = \begin{cases} 78; \overline{P} \geqslant 36 \\ 114 - \overline{P}; 20 \leqslant \overline{P} \leqslant 36 \\ 144 - 2.5\overline{P}; 16 \leqslant \overline{P} \leqslant 20 \\ 208 - 6.5\overline{P}; 8 \leqslant \overline{P} \leqslant 16 \\ 0; \overline{P} \leqslant 8 \end{cases} \tag{1}$$